Capítulo 8

Transformada de Laplace

A transformada de Laplace permitirá que obtenhamos a solução de uma equação diferencial ordinária de coeficientes constantes através da resolução de uma equação algébrica.
A transformada de Laplace de uma função f é uma transformada integral. Isto é, ela é da forma:

$$Y(s) = \int_{\alpha}^{\beta} K(s,t)\, f(t)\, dt. \tag{8.1}$$

A função $K(s,t)$ é chamada de núcleo da transformada.
Para definir a transformada de Laplace, precisaremos da noção de integral imprópria. Veja **[L]**.

Definição 30. *Seja $f : [0,+\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$. A transformada de Laplace da função $f(t)$ é denotada e definida por:*

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st}\, f(t)\, dt,$$

se a integral imprópria converge, pelo menos para algum valor de s.

No caso da transformada de Laplace, o núcleo da transformada é e^{-st}.

Exemplo 94. $f(t) = 1,\ t \geq 0$

Aplicamos a definição:

$$F(s) = \mathcal{L}\{1\} = \int_0^{\infty} e^{-st}\, dt = \lim_{A\to\infty} \int_0^{A} e^{-st}\, dt = \lim_{A\to\infty} \big(-\frac{e^{-sA}}{s} + \frac{1}{s}\big) = \frac{1}{s},$$

se $s > 0$.

Exemplo 95. $f(t) = e^{kt},\ t \geq 0$

Aplicamos a definição:

$$\begin{aligned} F(s) = \mathcal{L}\{e^{kt}\} &= \int_0^\infty e^{-st}\, e^{kt}\, dt = \int_0^\infty e^{(k-s)t}\, dt \\ &= \lim_{A\to\infty} \int_0^A e^{(k-s)t}\, dt = \lim_{A\to\infty} \big(-\frac{e^{(k-s)A}}{k-s} - \frac{1}{k-s}\big) \\ &= \frac{1}{s-k}, \end{aligned}$$

se $s > k$.

Exemplo 96. $f(t) = t^3,\ t \geq 0$

Aplicando a definição:

$$\begin{aligned} F(s) = \mathcal{L}\{t^3\} &= \int_0^\infty e^{-st}\, t^3\, dt = \lim_{A\to\infty} \int_0^A e^{-st}\, t^3\, dt \\ &= \lim_{A\to\infty} \left[-\frac{e^{-sA}A^3}{s} - \frac{3e^{-sA}A^2}{s^2} - \frac{6e^{-sA}A}{s^3} - \frac{6e^{-sA}}{s^4} + \frac{6}{s^4} \right] = \frac{6}{s^4}, \end{aligned}$$

se $s > 0$.

Exemplo 97. $f(t) = \begin{cases} 0 & se \quad 0 \leq t < 5 \\ 5 & se \quad 5 \leq t \end{cases}$

$$\begin{aligned} F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} &= \int_0^\infty e^{-st}\, f(t) dt = \lim_{A\to\infty} \int_5^A 5\, e^{-st}\, dt \\ &= 5 \lim_{A\to\infty} \left[\frac{e^{-5s}}{s} - \frac{e^{-sA}}{s} \right] = \frac{5\, e^{-5s}}{s}, \end{aligned}$$

se $s > 0$.
Como a transformada de Laplace envolve integração, é natural que a transformada herede propriedades da integral. Uma destas propriedades é a linearidade.
Sejam f e g duas funções cujas transformada de Laplace existem para $s > a_1$ e $s > a_2$, respectivamente. Então, para $s > \max\{a_1, a_2\}$, então:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{\alpha f(t) + \beta g(t)\} &= \int_0^\infty e^{-st} \big(\alpha f(t) + \beta g(t)\big)\, dt \\ &= \alpha \int_0^\infty e^{-st}\, f(t) + \beta \int_0^\infty e^{-st}\, g(t) dt \\ &= \alpha\, \mathcal{L}\{f(t)\} + \beta\, \mathcal{L}\{g(t)\}, \quad \text{para todo} \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Acabamos de provar o seguinte teorema:

Teorema 13. *Se α e β são constantes, então*

$$\mathcal{L}\{\alpha\, f(t) + \beta\, g(t)\} = \alpha\, \mathcal{L}\{f(t)\} + \beta\, \mathcal{L}\{g(t)\}$$

para todo s tal que as transformadas tanto de f quanto de g existam.

O resultado acima permitem que calculemos a transformada de algumas funções a partir de outras transformadas já conhecidas.

Exemplo 98. *Calcule $\mathcal{L}(5 + 8\, t^3)$ se $t \geq 0$.*

Como $\mathcal{L}(1) = \dfrac{1}{s}$ e $\mathcal{L}(t^3) = \dfrac{6}{s^4}$; aplicando o teorema:

$$\mathcal{L}(5 + 8\, t^3) = 5\, \mathcal{L}(1) - 8\, \mathcal{L}(t^3) = \frac{5}{s} - \frac{48}{s^4},$$

se $s > 0$.

Exemplo 99. *Calcule $\mathcal{L}(\cosh kx)$ e $\mathcal{L}(\sinh kx)$ se $t \geq 0$.*

Como $\cosh kx = \dfrac{e^{kx} + e^{-kx}}{2}$ e $\mathcal{L}(e^{kx}) = \dfrac{1}{s-k}$, se $s > k$; aplicando o teorema:

$$\mathcal{L}(\cosh kx) = \frac{1}{2}\, \mathcal{L}(e^{kx}) + \frac{1}{2}\, \mathcal{L}(e^{-kx}) = \frac{s}{s^2 - k^2},$$

se $s > k$. Analogamente $\mathcal{L}(\sinh kx) = \dfrac{1}{s^2 - k^2}$, se $s > k$.

8.1 Funções de ordem exponencial

Agora, desejamos saber que tipo de funções possuim transformadas de Laplace.

Definição 31. *Uma função f é contínua por partes em um intervalo $[\alpha, \beta]$ se o intervalo puder ser particionado em um número finito de subintervalos*

$$(t_i, t_{i+1}), \quad \alpha = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = \beta$$

tais que

1. *f é contínua em cada subintervalo aberto (t_i, t_{i+1})*
2. *São finitos os limites laterais:*

$$\lim_{t \to t_i^+} f(t) \qquad e \qquad \lim_{t \to t_{i+1}^-} f(t), \qquad 0 \leq i \leq n-1,$$

   existem

Exemplo 100. *Consideremos*

$$f(t) = \begin{cases} 0, & \textit{para } t < 2 \\ 1, & \textit{para } t \geq 2 \end{cases}$$

A função f é contínua por partes em $\mathbb{R}$, pois f é contínua nos subintervalos $(-\infty, 2)$ e $(2, +\infty)$

$$\lim_{t \to 2^+} f(t) = 1, \qquad \lim_{t \to 2^-} f(t) = 0.$$

Exemplo 101. *A função*

$$f(t) = \frac{t+1}{t-1}$$

não é contínua por partes em $[0, 4]$ *pois*

$$\lim_{t \to 1^{\pm}} f(t) = \pm\infty.$$

Definição 32. *Uma função f é de ordem exponencial em $[0, \infty)$ se existem constantes $C > 0$ e k, tais que*

$$|f(t)| \leq C\, e^{kt},$$

para todo $t \in (0, \infty) \cap Dom_f$.

Exemplo 102. *A função $f(t) = \cos 2t$ é de ordem exponencial em $[0, \infty)$, pois para $C = 1$ e $k = 0$,*

$$|f(t)| = |\cos 2t| \leq C\, e^{kt} = 1, \quad \forall t > 0$$

Para a classe da funções que são contínuas por partes e de ordem exponencial, a transformada de Laplace está bem definida e vale o seguinte teorema:

Teorema 14. *Suponha que*

1. *f seja contínua por partes no intervalo $[0, A]$ para qualquer $A > 0$;*

2. *existem $C, k, M \in \mathbb{R}$ com $C > 0$, $M \geq 0$ tais que $|f(t)| \leq Ce^{kt}$ quando $t \geq M$.*

Então, a transformada de Laplace

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t)dt$$

existe para $s > k$.

Note que:

$$\int_0^\infty e^{-st}f(t)\,dt = \int_0^M e^{-st}f(t)\,dt + \int_M^\infty e^{-st}f(t)\,dt$$

$$\int_M^A |e^{-st}f(t)|\,dt \le C\int_M^A |e^{-st}e^{kt}|\,dt = C\frac{e^{(k-s)t}}{k-s}\bigg|_M^A$$

$$= C\frac{e^{(k-s)A}}{k-s} - C\frac{e^{(k-s)M}}{k-s}.$$

Logo

$$\lim_{A\to\infty}\int_M^A |e^{-st}f(t)|\,dt < \infty$$

e isto implica:

$$\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt < \infty.$$

O Teorema acima nos diz que se uma função for contínua por partes e de ordem exponencial, então esta função tem transformada de Laplace e sabemos também que a transformada está bem definida para todos os valores de s maiores do que uma certa constante k.

Corolário 1. *Se $f(t)$ satisfaz as hipóteses do Teorema 14, então:*

$$\lim_{s\to\infty} F(s) = 0$$

Até agora, estabelecemos no Teorema 14, condições suficientes para que possamos calcular a transformada de Laplace de uma certa classe de funções e conhecemos, no Corolário, uma propriedade das transformadas de Laplace de funções pertencentes a esta classe. É conveviente observar, que há funções que não satisfazem as hipóteses do Teorema 14 e ainda assim têm transformada de Laplace. Além disso, dentre estas funções encontramos exemplos cujas transformadas não têm a propriedade apontada no Corolário.

Exemplo 103. $f(t) = \operatorname{sen} t,\ t \ge 0.$

Claramente f satisfaz as hipóteses do Teorema 14.

$$\begin{aligned}
\int_0^A e^{-st}\operatorname{sen} t\,dt &= -\frac{e^{-st}\operatorname{sen} t}{s}\Big|_0^A + \frac{1}{s}\int_0^A e^{-st}\cos t\,dt \\
&= -\frac{e^{-sA}\operatorname{sen} A}{s} - \frac{e^{-st}\cos t}{s^2}\Big|_0^A - \frac{1}{s^2}\int_0^A e^{-st}\operatorname{sen} t\,dt \\
\frac{s^2+1}{s^2}\int_0^A e^{-st}\operatorname{sen} t\,dt &= -\frac{e^{-sA}\operatorname{sen} A}{s} - \frac{e^{-sA}\cos A}{s^2} + \frac{1}{s^2}
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
F(s) = \mathcal{L}\{\operatorname{sen} t\} &= \int_0^\infty e^{-st}\operatorname{sen} t\,dt = \lim_{A\to\infty}\int_0^A e^{-st}\operatorname{sen} t\,dt \\
&= \frac{s^2}{s^2+1}\lim_{A\to\infty}\left(-\frac{e^{-sA}\operatorname{sen} A}{s} - \frac{e^{-sA}\cos A}{s^2} + \frac{1}{s^2}\right) \\
&= \frac{1}{s^2+1}, \quad s > 0
\end{aligned}$$

Lembremos que estamos interessados em introduzir a transformada de Laplace para simplificar a resolução de equações diferenciais. Queremos determinar uma função $y(t)$, solução de uma equação diferencial, resolvendo um problema associado para $Y(s)$, a transformada de Laplace de $y(t)$. Logo, uma vez determinada $Y(s)$, queremos encontrar $y(t)$. Ou seja, queremos inverter o operador transformada de Laplace. Para tanto, devemos provar que se $\mathcal{L}\{f\} = \mathcal{L}\{g\}$, temos $f = g$. O próximo resultado nos dirá que f e g são "quase idênticas".

Teorema 15. *Se $f(t)$ e $g(t)$ satisfazem as hipóteses do Teorema 14 e $F(s) = \mathcal{L}\{f\} = \mathcal{L}\{g\} = G(s)$ para todo $s > a$ (para algum a); então, $f(t) = g(t)$ exceto nos pontos de descontinuidade.*

8.2 Transformada Inversa de Laplace

O Teorema 3 nos diz quando equação:

$$\mathcal{L}\{y\} = \phi(s)$$

puder ser resolvida para $y(t)$, a solução é "essencialmente" única. Esta solução se chama Transformada Inversa de Laplace da função $\phi(s)$, e é denotada por:

$$\mathcal{L}^{-1}\{\phi(s)\}.$$

A transformada inversa também é um operador linear. De fato, consideremos $\phi(s) = F_1(s) + F_2(s)$ e $\mathcal{L}\{f_1(t)\} = F_1(s)$ e $\mathcal{L}\{f_2(t)\} = F_2(s)$, temos para $s > s_0$,

$$\mathcal{L}\{f_1(t) + f_2(t)\} = \mathcal{L}\{f_1(t)\} + \mathcal{L}\{f_2(t)\} = \phi(s)$$

Portanto:

$$\mathcal{L}^{-1}\{F_1(s) + F_2(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\{\phi(s)\} = f_1(t) + f_2(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F_1(s)\} + \mathcal{L}^{-1}\{F_2(s)\}$$

Exemplo 104. *Calcule* $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{6s^2 - 2s^4 + 24}{s^4(s^2+4)}\right\}$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{6s^2 - 2s^4 + 24}{s^4(s^2+4)}\right\} &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{6}{s^4} - \frac{2}{s^2+4}\right\} \\ &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{6}{s^4}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s^2+4}\right\} \\ &= t^3 - \operatorname{sen} 2t\end{aligned}$$

Teorema 16 (1º Teorema do deslocamento)**.** *Se* $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$ *existe para* $s > a$ *e se* $c \in \mathbb{R}$, *então a transformada de Laplace da função* $e^{ct}f(t)$ *existe para* $s > a + c$ *e é dada por*

$$\mathcal{L}\{e^{ct}f(t)\} = F(s-c).$$

Reciprocamente, se $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$, *então*

$$e^{ct}f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s-c)\}$$

Para $s - c > a$, temos

$$F(s-c) = \int_0^\infty e^{-(s-c)t}f(t)dt = \int_0^\infty e^{-st}[e^{ct}f(t)]dt = \mathcal{L}\{e^{ct}f(t)\}$$

A relação acima nos diz que

$$e^{ct}f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s-c)\}$$

O Teorema acima nos diz que uma translação no eixo s corresponde a uma multiplicação da função em t por uma exponencial.

Exemplo 105. *Calcule* $\mathcal{L}^{-1}\{G(s)\}$ *com*

$$G(s) = \frac{1}{s^2 - 4s + 5}$$

Completando quadrados:

$$\frac{1}{s^2-4s+5} = \frac{1}{s^2-4s+4+1} = \frac{1}{(s-2)^2+1}.$$

Como:

$$F(s) = \mathcal{L}\{\operatorname{sen} t\} = \frac{1}{s^2+1}, \quad s > 1;$$

logo:

$$\mathcal{L}^{-1}\{G(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\{F(s-2)\} = e^{2t}\operatorname{sen} t$$

Teorema 17 (Mudança de Escala). *Se $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$ existe para $s > a \geq 0$ e se $c > 0$, então a transformada de Laplace da função $f(ct)$ existe para $s > ac$ e é dada por:*

$$\mathcal{L}\{f(ct)\} = \frac{1}{c}F\left(\frac{s}{c}\right).$$

De fato:

$$\mathcal{L}\{f(ct)\} = \int_0^\infty e^{-st} f(ct)\, dt = \frac{1}{c}\int_0^\infty e^{-\frac{s}{c}u} f(u)\, du$$

$$= \mathcal{L}\left(\frac{s}{c}\right) = F\left(\frac{s}{c}\right), \quad \text{se} \quad \frac{s}{c} > a.$$

Exemplo 106. *Calcule $\mathcal{L}\{f(t)\}$, com $f(t) = \operatorname{sen} 3t$*

Como:

$$F(s) = \mathcal{L}\{\operatorname{sen} t\} = \frac{1}{s^2+1}, \quad s > 0,$$

logo:

$$\mathcal{L}\{\operatorname{sen} 3t\} = \frac{1}{3}F\left(\frac{s}{3}\right) = \frac{1}{3}\frac{1}{\left(\frac{s}{3}\right)^2+1} = \frac{1}{3}\frac{9}{s^2+9} = \frac{3}{s^2+9}, \qquad s > 0.$$

Teorema 18. *Suponha que*

1. *f seja contínua por partes no intervalo $[0, A]$ para qualquer $A > 0$;*
2. *existem $C, k, M \in \mathbb{R}$ com $C > 0$, $M \geq 0$ tais que $|f(t)| \leq Ce^{kt}$ quando $t \geq M$*

Então, a transformada de Laplace da função $-tf(t)$ existe para $s > k$ e é dada por:

$$\mathcal{L}\{-tf(t)\} = \frac{d}{ds}\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{d}{ds}F(s).$$

A aplicação repetida do resultado acima nos diz que:

$$\mathcal{L}\{(-t)^n f(t)\} = \frac{d^n}{ds^n}\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{d^n}{ds^n}F(s)$$

A propriedade acima é útil para se encontrar uma transformada inversa quando é mais fácil trabalhar com a derivada da transformada do que com a própria transformada.

Exemplo 107. *Determine*

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{s}\right)\right\}.$$

Considere:

$$G(s) = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{s}\right) \qquad \text{e} \qquad g(t) = \mathcal{L}^{-1}\{G(s)\}.$$

Logo:

$$\mathcal{L}\{-tg(t)\} = \frac{d}{ds}\,G(s) = \frac{-\frac{1}{s^2}}{1+\frac{1}{s^2}} = -\frac{1}{s^2+1}.$$

Calculando a transformada inversa, obtemos

$$-tg(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{-\frac{1}{s^2+1}\right\} = -\operatorname{sen} t.$$

Portanto,

$$g(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{s}\right)\right\} = \frac{\operatorname{sen} t}{t}$$

Teorema 19. *Suponha que*

1. *f seja contínua em $[0, A]$ e que f' seja contínua por partes no intervalo $[0, A]$ para qualquer $A > 0$;*

2. *existem $C, k, M \in \mathbb{R}$ com $C, M > 0$ tais que $|f(t)| \leq Ce^{kt}$ quando $t \geq M$*

Então, a transformada de Laplace de $f'(t)$ existe para $s > k$ e é dada por

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = s\mathcal{L}\{f(t)\} - f(0) = sF(s) - f(0)$$

Sejam $t_1 < t_2 < \cdots < t_n,\ t_i \in [0, A]$ os (possíveis) pontos de descontinuidade de f', logo:

$$\int_0^A e^{-st}\, f'(t)\, dt = \int_0^{t_1} e^{-st}\, f'(t)\, dt + \int_{t_1}^{t_2} e^{-st}\, f'(t)\, dt + \cdots + \int_{t_n}^{A} e^{-st}\, f'(t)\, dt.$$

Integrando por partes,

$$\begin{aligned}\int_a^b e^{-st}\, f'(t)\, dt &= e^{-st} f(t)\Big|_a^b + s\int_a^b e^{-st}\, f(t)\, dt \\ &= e^{-sb} f(b) - e^{-sa} f(a) + s\int_a^b e^{-st} f(t)\, dt.\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}\int_0^A e^{-st}\, f'(t)\, dt &= e^{-st_1} f(t_1) - f(0) + s\int_0^{t_1} e^{-st} f(t)\, dt \\ &\quad + e^{-st_2} f(t_2) - e^{-st_1} f(t_1) + s\int_{t_1}^{t_2} e^{-st}\, f(t)\, dt \\ &\quad + \cdots + e^{-sA} f(A) - e^{-st_n}\, f(t_n) + s\int_{t_n}^{A} e^{-st}\, f(t)\, dt \\ &= e^{-sA} f(A) - f(0) + s\int_0^A e^{-st}\, f(t)\, dt\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{f'(t)\} &= \lim_{A\to\infty}\int_0^A e^{-st}\, f'(t)\, dt \\ &= \lim_{A\to\infty} e^{-sA}\, f(A) - f(0) + s\,\lim_{A\to\infty}\int_0^A e^{-st}\, f(t)\, dt \\ &= s\,\mathcal{L}\{f(t)\} - f(0), \quad s > k,\end{aligned}$$

como $|f(t)| \le C\, e^{kt}$, se $t \ge M$; então:

$$\lim_{A\to\infty} e^{-sA}\, |f(A)| \le C \lim_{A\to\infty} e^{(k-s)}\, A = 0 \Rightarrow \lim_{A\to\infty} e^{-sA}\, f(A) = 0$$

Se f' for contínua e de ordem exponencial e f'' for conítnua por partes em intervalos $[0, A],\ A > 0$, pelo Teorema 19, temos

$$\mathcal{L}\{f''(t)\} = s\mathcal{L}\{f'(t)\} - f'(0)$$

e se, além disso, f for contínua e de ordem exponencial, temos

$$\mathcal{L}\{f''(t)\} = s\mathcal{L}\{f'(t)\} - f'(0) = s^2\mathcal{L}\{f(t)\} - sf(0) - f'(0)$$

Na verdade, podemos generalizar o resultado acima para derivadas de ordem superior.

Teorema 20. *Suponha que*

1. $f, f', \ldots, f^{(n-1)}$ *sejam contínuas em* $[0, A]$ *e que* $f^{(n)}$ *seja contínua por partes no intervalo* $[0, A]$ *para qualquer* $A > 0$*;*
2. *existem* $C, k, M \in \mathbb{R}$ *com* $C, M > 0$ *tais que* $|f(t)| \leq Ce^{kt}, |f'(t)| \leq Ce^{kt}, \ldots, |f^{(n-1)}(t)| \leq Ce^{kt}$ *quando* $t \geq M$

Então, a transformada de Laplace de $f^{(n)}(t)$ *existe para* $s > k$ *e é dada por*

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\} = s^n\mathcal{L}\{f(t)\} - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \cdots - sf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)$$

Exemplo 108. *Calcule* $\mathcal{L}\{t^n\}$

Seja $f(t) = t^n$

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^n}{dt^n}f(t)\right\} = \mathcal{L}\{n!\} = n!\mathcal{L}\{1\} = \frac{n!}{s}, \quad s > 0.$$
$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^n}{dt^n}f(t)\right\} = s^n\mathcal{L}\{f(t)\} + s^{n-1}f(0) + s^{n-2}f'(0) + \cdots + sf^{(n-2)}(0) + f^{(n-1)}(0),$$
$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^n}{dt^n}f(t)\right\} = s^n\mathcal{L}\{t^n\},$$
$$\mathcal{L}\{t^n\} = \frac{n!}{s^{n+1}}, \quad s > 0$$

Teorema 21. *Seja* $F(s) = \mathcal{L}(f(t))$*; então:*

$$\mathcal{L}\left(\int_0^t f(x)\,dx\right) = \frac{F(s)}{s}, \quad \text{se} \quad s > 0.$$

Seja $g(t) = \int_0^t f(x)\,dx$; então $g'(t) = f(t)$:

$$F(s) = \mathcal{L}(g'(t)) = s\,\mathcal{L}(g(t)).$$

8.3 Resolução de PVI

Com a teoria desenvolvida até aqui, podemos aplicar a Transformada de Laplace para resolver problemas de valor inicial.

Exemplo 109. *Resolva o PVI:*

$$\begin{cases} y'' - y' - 6y = 0 \\ y(0) = 2, \quad y'(0) = -1 \end{cases}$$

Usando o Teorema 20, temos

$$\mathcal{L}\{y'(t)\} = s\mathcal{L}\{y(t)\} - y(0) \qquad \text{e} \qquad \mathcal{L}\{y''(t)\} = s^2\mathcal{L}\{y(t)\} - sy(0) - y'(0).$$

Portanto:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{y'' - y' - 6y\} = \mathcal{L}\{y''(t)\} - \mathcal{L}\{y'(t)\} - 6\mathcal{L}\{y(t)\} = \mathcal{L}\{0\} = 0 \\ \mathcal{L}\{y'' - y' - 6y\} = (s^2 - s - 6)\mathcal{L}\{y(t)\} - 2s + 1 + 2 = 0 \\ Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\} = \frac{2s-3}{s^2 - s - 6} \end{aligned}$$

Observe que para determinarmos a solução $y(t)$ do PVI, basta invertermos a transformada acima. Para tanto, vamos escrever a fração que aparece no lado direito de um modo mais conveniente. Observe que $s^2 - s - 6 = 0$ nada mais é do que a equação característica da equação diferencial $y'' - y' - 6y = 0$. Como:

$$\frac{2s-3}{s^2 - s - 6} = \frac{2s-3}{(s-3)(s+2)} = \frac{3}{5(s-3)} + \frac{7}{5(s+2)},$$

e $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s-a}\right\} = e^{at}$; logo:

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2s-3}{s^2-s-6}\right\} = \frac{3}{5}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-3}\right\} + \frac{7}{5}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+2}\right\} \\ &= \frac{3}{5}e^{3t} + \frac{7}{5}e^{-2t} \end{aligned}$$

Observemos que, para resolver o PVI, não encontramos primeiro a solução geral equação homogênea. O método da Transformada de Laplace fornece diretamente a solução particular desejada.

Exemplo 110. *Encontre uma solução geral da edo:*

$$y'' - 2\,y' + 1 = 0$$

Sejam $y(0) = k_1$ e $y'(0) = k_2$. Usando o Teorema 20, obtemos

$$\mathcal{L}\{y'(t)\} = s\mathcal{L}\{y(t)\} - y(0) \quad \text{e} \quad \mathcal{L}\{y''(t)\} = s^2\mathcal{L}\{y(t)\} - sy(0) - y'(0).$$

Portanto:

$$\mathcal{L}\{y'' - 2\,y' + 1\} = \mathcal{L}\{y''(t)\} - 2\mathcal{L}\{y'(t)\} + \mathcal{L}\{y(t)\} = \mathcal{L}\{0\} = 0$$
$$\mathcal{L}\{y'' - 2\,y' + 1\} = (s^2 - 2\,s + 1)\mathcal{L}\{y(t)\} - sk_1 + 2k_1 - k_2 = 0$$

$$Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\} = \frac{(s-2)k_1 + k_2}{s^2 - 2s + 1}$$

Como:

$$\frac{(s-2)k_1 + k_2}{(s-1)^2} = \frac{(s-1)k_1 - k_1 + k_2}{(s-1)^2} = \frac{k_1}{s-1} + \frac{-k_1 + k_2}{(s-1)^2},$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\} = e^t, \quad \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-1)^2}\right\} = t\,e^t$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{(s-2)k_1 + k_2}{(s-1)^2}\right\}$$

$$= k_1\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\} + (k_2 - k_1)\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-1)^2}\right\}$$

$$= k_1 e^t + (k_2 - k_1)te^t = k_3 e^t + k_4 te^t$$

Exemplo 111. *Resolva o PVI:*

$$\begin{cases} y'' + y = t \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = -2 \end{cases}$$

Usando o Teorema 20, temos

$$\mathcal{L}\{y''(t)\} = s^2\mathcal{L}\{y(t)\} - sy(0) - y'(0).$$

Portanto:

$$\mathcal{L}\{y'' + y\} = \mathcal{L}\{y''(t)\} + \mathcal{L}\{y(t)\} = \mathcal{L}\{t\} = \frac{1!}{s^2}, \quad s > 0$$
$$s^2\mathcal{L}\{y(t)\} - sy(0) - y'(0) + \mathcal{L}\{y(t)\} = [s^2+1]\mathcal{L}\{y(t)\} - s + 2 = \frac{1}{s^2}$$

$$Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\} = \frac{1}{s^2+1}\left[\frac{1}{s^2} + s - 2\right] = \frac{1}{s^2(s^2+1)} + \frac{s}{s^2+1} - \frac{2}{s^2+1}$$
$$Y(s) = \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2+1} + \frac{s}{s^2+1} - \frac{2}{s^2+1}$$

$$\begin{aligned} y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2} - \frac{3}{s^2+1} + \frac{s}{s^2+1}\right\} \\ &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} - 3\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+1}\right\} = t - 3\,\mathrm{sen}\,t + \cos t \end{aligned}$$

Exemplo 112. *Resolva o PVI:*

$$\begin{cases} y'' + 4\,y' + 13\,y = 2\,t + 3\,e^{-2t}\cos 3t \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = -1 \end{cases}$$

Usando o Teorema 20,

$$\mathcal{L}\{y''(t)\} = s^2\mathcal{L}\{y(t)\} - sy(0) - y'(0)$$

Portanto:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{y'' + 4\,y' + 13\,y\} &= \mathcal{L}\{y''(t)\} + 4\left(s\,\mathcal{L}\{y(t)\} - y(0)\right) + 13\,\mathcal{L}\{y(t)\} \\ &= \mathcal{L}\{2\,t + 3\,e^{-2t}\,\cos 3t\} \\ &= \frac{2}{s^2} + 3\,\frac{s+2}{(s+2)^2+9}, \quad s > 0, \end{aligned}$$

Fazendo $Y(s) = \mathcal{L}\{y\}$:

$$\left(s^2 + 4\,s + 13\right)Y(s) + 1 = \frac{2}{s^2} + \frac{3(\,s+2)}{(s+2)^2+9}$$

$$Y(s) = \frac{1}{s^2+4s+13}\left(\frac{2}{s^2} + \frac{3(s+2)}{(s+2)^2+9} - 1\right).$$

Por outro lado:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+4s+13}\right\} = \frac{1}{3}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3}{(s+2)^2+9}\right\} = \frac{1}{3}e^{-2t}\,\mathrm{sen}\,3t,$$

separando em frações parciais:

$$\begin{aligned}\frac{2}{s^2(s^2+4\,s+13)} &= \frac{A}{s}+\frac{B}{s^2}+\frac{C\,s+D}{s^2+4\,s+13}\\ &= -\frac{4}{169}\,\frac{1}{s}+\frac{1}{13}\,\frac{1}{s^2}+\frac{1}{169}\,\frac{3+4\,s}{s^2+4\,s+13};\end{aligned}$$

logo,

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s^2(s^2+4\,s+13)}\right\} = -\frac{8}{169}+\frac{2}{13}t+\frac{8}{169}\,e^{-2t}\,\cos 3t-\frac{10}{3(169)}\,e^{-2t}\,\mathrm{sen}\,3t.$$

Seja $F(s)=\mathcal{L}\{\mathrm{sen}\,3t\}$, pelo Teorema 18,

$$-\,t\,\mathrm{sen}\,3t = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{d}{ds}\frac{3}{s^2+9}\right\} = -\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{6\,s}{(s^2+9)^2}\right\},$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3\,(s+2)}{[(s+2)^2+9]^2}\right\} = \frac{1}{2}\,e^{-2t}\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{6\,s}{(s^2+9)^2}\right\} = \frac{1}{2}\,e^{-2t}\,t\,\mathrm{sen}\,3t$$

Portanto,

$$\begin{aligned}y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+4s+13}\left(\frac{2}{s^2}+\frac{3\,(s+2)}{(s+2)^2+9}-1\right)\right\}\\ &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s^2(s^2+4s+13)}\right\}+\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3(s+2)}{\big((s+2)^2+9\big)^2}\right\}-\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+4\,s+13}\right\}\\ &= -\frac{8}{169}+\frac{2}{13}\,t+\frac{8}{169}\,e^{-2t}\,\cos 3t-\frac{179}{3(169)}\,e^{-2t}\,\mathrm{sen}\,3t+\frac{1}{2}\,e^{-2t}\,t\,\mathrm{sen}\,3t.\end{aligned}$$

8.4 Função Degrau Unitário

Em aplicações que envolvem circuitos elétricos, é comum que a força externa que atua na equação seja descontínua. A transformada de Laplace se mostrará mais útil e simples para resolver problemas deste tipo do que os método que conhecemos até agora.

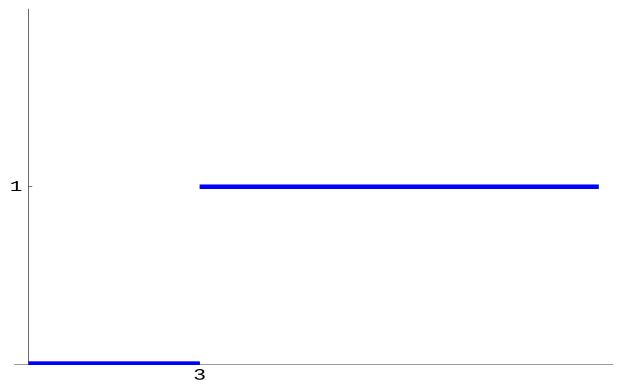


Figura 8.1: Gráfico de $u_3(t)$

Definição 33. *A função degrau unitário e definida e denotada por:*

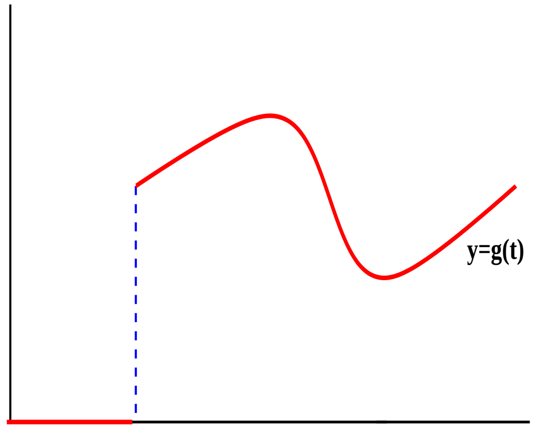
$$u_c(t) = \begin{cases} 0, & t < c, \quad c \geq 0 \\ 1, & t \geq c \end{cases}$$

Calculemos a transformada de Laplace de u_c:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{u_c(t)\} &= \lim_{A\to\infty} \int_0^A e^{-st}\, u_c(t)\, dt \\
&= \lim_{A\to\infty} \left(+ \int_c^A e^{-st}\, dt \right) \\
&= \lim_{A\to\infty} \left(-\frac{e^{-sA}}{s} + \frac{e^{-sc}}{s} \right) \\
&= \frac{e^{-sc}}{s}, \quad s > 0.
\end{aligned}$$

Podemos usar a função degrau para expressar funções descontínuas que podem ser obtidas por translação de funções conhecidas. Por exemplo, se tivermos a função $g(t)$ cujo gráfico é igual ao gráfico da função $f(t)$ transladado de

uma distância c no sentido positivo do eixo t,



Podemos escrever g usando a função f e a função degrau

$$g(t) = u_c(t)f(t-c) = \begin{cases} 0, & t < c, \\ f(t-c), & t \geq c \end{cases}$$

Veremos no próximo Teorema como se relacionam as transformada de g e f.

Teorema 22 (2º Teorema do deslocamento). *Se $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$ existe para $s > a$ e se $c \in \mathbb{R}$, então a transformada de Laplace da função $g(t) = u_c(t)f(t-c)$ existe para $s > a$ e é dada por*

$$\mathcal{L}\{u_c(t)\, f(t-c)\} = e^{-cs}\, \mathcal{L}\{f(t)\} = e^{-cs}\, F(s).$$

Reciprocamente, se $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$, então

$$\mathcal{L}^{-1}\{e^{-cs}\, F(s)\} = u_c(t)\, f(t-c).$$

Dea fato, para $s > a$, temos:

$$\begin{aligned} \int_0^A e^{-st} u_c(t) f(t-c) dt &= \int_c^A e^{-st} f(t-c) dt \overset{(u=t-c)}{=} \int_0^{A-c} e^{-s(u+c)} f(u) du \\ &= e^{-sc} \int_0^{A-c} e^{-su} f(u) du \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{u_c(t) f(t-c)\} &= \lim_{A\to\infty} \int_0^A e^{-st} u_c(t) f(t-c) dt = \lim_{A\to\infty} e^{-sc} \int_0^{A-c} e^{-su} f(u) du \\ &= e^{-sc} \int_0^{\infty} e^{-su} f(u) du = e^{-sc} \mathcal{L}\{f(t)\} \end{aligned}$$

A relação acima nos diz que

$$\mathcal{L}^{-1}\{e^{-cs}F(s)\} = u_c(t)f(t-c)$$

O Teorema 22 nos diz que uma translação no eixo t de uma distância c no sentido positivo de t corresponde a uma multiplicação da transformada em t por uma exponencial.

Exemplo 113. *Calcule $\mathcal{L}\{f(t)\}$, com*

$$f(t) = \begin{cases} \operatorname{sen} t, & 0 \le t < \frac{\pi}{4} \\ \operatorname{sen} t + \cos\left(t - \frac{\pi}{4}\right), & t \ge \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

Podemos escrever a função $f(t)$ da seguinte forma:

$$f(t) = \operatorname{sen} t + \begin{cases} 0, & 0 \le t < \dfrac{\pi}{4} \\ \cos\left(t - \dfrac{\pi}{4}\right), & t \ge \dfrac{\pi}{4} \end{cases}$$

$$= \operatorname{sen} t + u_{\frac{\pi}{4}}(t) \cos\left(t - \frac{\pi}{4}\right).$$

Pelo Teorema 22, temos

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \mathcal{L}\left\{\operatorname{sen} t + u_{\frac{\pi}{4}}(t)\cos\left(t - \frac{\pi}{4}\right)\right\} = \mathcal{L}\left\{\operatorname{sen} t\right\} + \mathcal{L}\left\{u_{\frac{\pi}{4}}(t)\cos\left(t - \frac{\pi}{4}\right)\right\}$$

$$= \frac{1}{s^2+1} + e^{-\frac{\pi}{4}s}\mathcal{L}\left\{\cos t\right\} = \frac{1}{s^2+1} + e^{-\frac{\pi}{4}s}\frac{s}{s^2+1}.$$

Exemplo 114. *Calcule $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$, com*

$$F(s) = \frac{1-e^{-2s}}{s^2}.$$

Pelo Teorema 22, temos:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1-e^{-2s}}{s^2}\right\} &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-2s}}{s^2}\right\} \\ &= t - u_2(t)(t-2) \\ &= t - \begin{cases} 0, & 0 \le t < 2 \\ t-2, & t \ge 2 \end{cases} \\ &= \begin{cases} t, & 0 \le t < 2 \\ 2, & t \ge 2. \end{cases} \end{aligned}$$

Exemplo 115. *Resolva o PVI:*

$$\begin{cases} y'' + 4\,y = g(t) \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 0 \end{cases} \qquad \textit{com} \qquad g(t) = \begin{cases} \cos 2t, & 0 \le t < 2\pi \\ 0, & t \ge 2\pi \end{cases}$$

Inicialmente, vamos reescrever a função g

$$g(t) = \big(1 - u_{2\pi}(t)\big)\, \cos 2t.$$

Usando o Teorema 20 e o Teorema 22:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{y''(t)\} &= s^2\,\mathcal{L}\{y(t)\} - s\,y(0) - y'(0) \\ &= s^2\,\mathcal{L}\{y(t)\}, \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{\cos 2t - u_{2\pi}(t)\, \cos 2(t-2\pi)\} &= \mathcal{L}\{\cos 2t\} - \mathcal{L}\{u_{2\pi}(t)\cos 2(t-2\pi)\} \\ &= \frac{s}{s^2+4} - e^{-2\pi s}\mathcal{L}\{\cos 2t\} \\ &= \frac{s}{s^2+4} - \frac{e^{-2\pi s}s}{s^2+4}. \end{aligned}$$

Denotando, $Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}$, obtemos:

$$\begin{aligned} s^2\,Y(s) + 4\,Y(s) &= \frac{s(1-e^{-2\pi s})}{s^2+4} \qquad \text{isto é:} \\ Y(s) &= \frac{s(1-e^{-2\pi s})}{(s^2+4)^2}. \end{aligned}$$

Como $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s^2+4}\right\} = \operatorname{sen} 2t$, usando o Teorema 18, podemos calcular:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+4)^2}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{-\frac{1}{4}\frac{d}{ds}\frac{2}{s^2+4}\right\} = -\frac{1}{4}\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{d}{ds}\frac{2}{s^2+4}\right\} = \frac{t\operatorname{sen}2t}{4}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s(1-e^{-2\pi s})}{(s^2+4)^2}\right\} &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+4)^2} - \frac{e^{-2\pi s}s}{(s^2+4)^2}\right\} \\ &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+4)^2}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-2\pi s}s}{(s^2+4)^2}\right\} \\ &= \frac{t\,\operatorname{sen}2t}{4} - \frac{u_{2\pi}(t)\,(t-2\pi)\,\operatorname{sen}2(t-2\pi)}{4}. \end{aligned}$$

Portanto, a a solução do PVI é:

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = \begin{cases} t, & 0 \le t < 2\pi \\ t - (t - 2\pi), & t \ge 2\pi \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{1}{4} t \operatorname{sen} 2t, & 0 \le t < 2\pi \\ \\ \dfrac{\pi}{2} \operatorname{sen} 2t, & t \ge 2\pi. \end{cases}$$

8.5 Funções Periódicas

A seguir estudaremos outra classe de funções que aparece com frequência como força externa em sistemas mecânicos e elétricos.

Definição 34. *Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é periódica de período $p > 0$ se $f(t+p) = f(t)$ para todo t. O menor período positivo é chamado de período fundamental.*

Exemplo 116. *As funções $f(x) = \operatorname{sen} x$ e $g(t) \cos(t)$ são periódicas com período fundamental $T = 2\pi$*

Teorema 23. *Se f é uma função contínua por partes, de ordem exponencial e periódica de período p, então a transformada de Laplace de f existe para $s > 0$ e é dada por*

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{1}{1 - e^{-ps}} \int_0^p e^{-st} f(t)\, dt.$$

De fato, seja $A = (k+1)p$, logo:

$$\int_0^A e^{-st} f(t)\, dt = \int_0^p e^{-st} f(t) dt + \int_p^{2p} e^{-st} f(t)\, dt + \cdots + \int_{kp}^{(k+1)p} e^{-st} f(t)\, dt.$$

Fazendo $t = u + kp$, obtemos:

$$\int_{kp}^{(k+1)p} e^{-st} f(t)\, dt = \int_0^p e^{-s(u+kp)} f(u+kp)\, du = e^{-ksp} \int_0^p e^{-su} f(u)\, du.$$

Então:

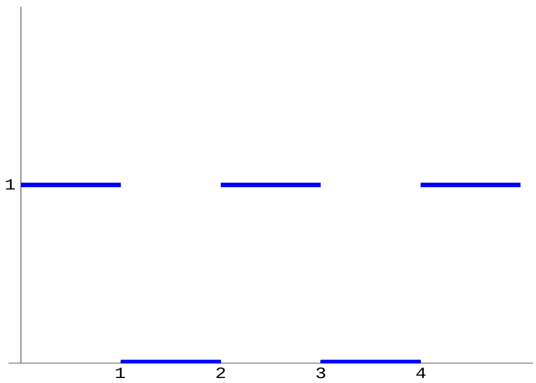
$$\int_0^A e^{-st} f(t) dt = \left[\int_0^p e^{-su} f(u)\, du\right] \sum_{n=0}^{k} e^{-nsp} = \left[\int_0^p e^{-su} f(u)\, du\right] \frac{1 - e^{-(k+1)sp}}{1 - e^{-ps}}$$

$$F(s) = \lim_{A \to \infty} \int_0^A e^{-st} f(t)\, dt = \left[\int_0^p e^{-su} f(u)\, du\right] \lim_{k \to \infty} \frac{1 - e^{-(k+1)sp}}{1 - e^{-ps}}$$

$$= \frac{1}{1 - e^{-ps}} \int_0^p e^{-st} f(t)\, dt.$$

Exemplo 117. *Calcule* $\mathcal{L}\{f(t)\}$, *com*

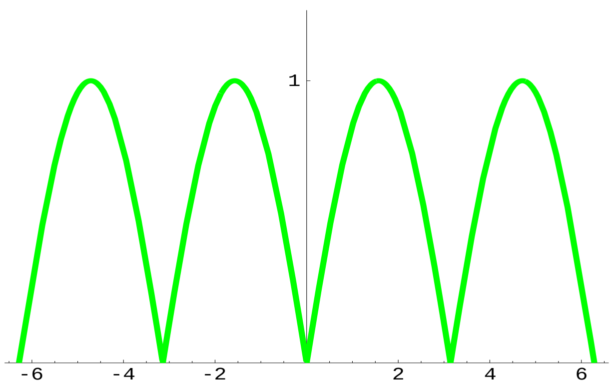
$$f(t) = \begin{cases} 1, & 0 \le t < 1 \\ 0, & 1 \le t < 2, \end{cases}$$
$$f(t+2) = f(t).$$



$$F(s) = \frac{1}{1-e^{-2s}} \int_0^2 e^{-st} f(t)\, dt = \frac{1}{1-e^{-2s}} \int_0^1 e^{-st}\, dt$$
$$= \frac{1}{1-e^{-2s}} \left[-\frac{e^{-st}}{s} \right|_0^1 = \frac{1-e^{-s}}{s(1-e^{-2s})} = \frac{1}{s(1+e^{-s})}, \qquad s > 0.$$

Exemplo 118. *Calcule* $\mathcal{L}\{f(t)\}$, *com*

$$f(t) = \operatorname{sen} t,\ 0 \le t < \pi, \qquad f(t+\pi) = f(t).$$



$$\begin{aligned} F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} &= \frac{1}{1-e^{-\pi s}} \int_0^{\pi} e^{-st} f(t)\, dt = \frac{1}{1-e^{-\pi s}} \int_0^{\pi} e^{-st} \operatorname{sen} t\, dt \\ &= \frac{1}{1-e^{-\pi s}} \frac{s^2}{s^2+1} \frac{e^{-s\pi}+1}{s^2} = \frac{1+e^{-\pi s}}{(s^2+1)(1-e^{-\pi s})}, \quad s > 0. \end{aligned}$$

8.6 Convolução

Exemplo 119. *Resolva o PVI*

$$\begin{cases} y'' + y = \cos t, \\ y(0) = y'(0) = 0. \end{cases}$$

Usando o Teorema 20,

$$\mathcal{L}\{y''(t)\} = s^2\mathcal{L}\{y(t)\} - sy(0) - y'(0) = s^2\mathcal{L}\{y(t)\}.$$

Portanto:

$$\mathcal{L}\{y'' + y\} = \mathcal{L}\{y''(t)\} + \mathcal{L}\{y(t)\} = \mathcal{L}\{\cos t\},$$

$$s^2\mathcal{L}\{y(t)\} + 6\mathcal{L}\{y(t)\} = [s^2+1]\mathcal{L}\{y(t)\} = \mathcal{L}\{\cos t\}.$$

Logo,

$$Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\} = \frac{1}{s^2+1}\mathcal{L}\{\cos t\} = \mathcal{L}\{\operatorname{sen} t\}\mathcal{L}\{\cos t\}.$$

É de se esperar que possamos relacionar as funções $\operatorname{sen} t$ e $\cos t$ com a tranformada inversa do produto das transformadas de $\operatorname{sen} t$ e $\cos t$. O próximo teorema nos dirá que a função

$$h(t) = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau \quad \text{é tal que} \quad H(s) = \mathcal{L}\{h(t)\} = \mathcal{L}\{f(t)\}\mathcal{L}\{g(t)\}.$$

Definição 35 (Convolução). *Seja f e g funções contínuas por partes. A convolução das funções f e g é denotada e definida para $t \geq 0$ por:*

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(\tau)\, g(t-\tau)\, d\tau.$$

Exemplo 120. *Calcule* $\mathcal{L}\{(\cos t) * (\operatorname{sen} t)\}$

Usando a identidade: $\cos A \,\text{sen}\, B = \dfrac{1}{2}\big(\text{sen}(A+B) - \text{sen}(A-B)\big)$, temos:

$$\begin{aligned}
(\cos t) * (\text{sen}\, t) &= \int_0^t \cos\tau \;\text{sen}(t-\tau)\, d\tau = \frac{1}{2}\int_0^t \big(\text{sen}\, t - \text{sen}(2\tau - t)\big)\, d\tau \\
&= \frac{1}{2}\left(\tau\, \text{sen}\, t + \frac{1}{2}\cos(2\tau - t)\right)\Big|_0^t \\
&= \frac{1}{2}\, t\; \text{sen}\, t + \frac{1}{4}\, \cos t - \frac{1}{4}\, \cos(-t) \\
&= \frac{t\; \text{sen}\, t}{2}.
\end{aligned}$$

Teorema 24. *Se f e g são funções contínuas por partes e de ordem exponencial, então a transformada da convolução $(f*g)(t)$ existe para $s>k$ e é dada por:*

$$\mathcal{L}\{(f*g)(t)\} = \mathcal{L}\{f(t)\}\,\mathcal{L}\{g(t)\} = F(s)\,G(s).$$

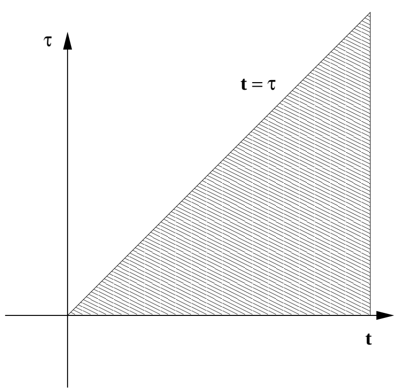
Análogamente,

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\,G(s)\} = (f*g)(t)$$

Observe que:

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty e^{-st}\,(f*g)(t)\,dt &= \int_0^\infty e^{-st}\int_0^t f(\tau)\,g(t-\tau)\,d\tau\,dt \\
&= \int_0^\infty\int_0^t e^{-st}\,f(\tau)\,g(t-\tau)d\tau\,dt
\end{aligned}$$

A integração acima está ocorrendo na seguinte região do plano $t\tau$:



que pode ser descrita por:

$$0 \le \tau \le t, \quad 0 \le t < \infty \quad \text{ou} \quad \tau \le t < \infty, \quad 0 \le \tau < \infty$$

Logo,

$$\begin{aligned}\int_0^\infty e^{-st}\,(f*g)(t)\,dt &= \int_0^\infty \int_0^t e^{-st}\,f(\tau)\,g(t-\tau)\,d\tau\,dt\\ &= \int_0^\infty f(\tau)\int_\tau^\infty e^{-st}\,g(t-\tau)\,dt\,d\tau,\end{aligned}$$

fazendo a mudança de variável $u = t - \tau$:

$$\begin{aligned}\int_0^\infty e^{-st}\,(f*g)(t)\,dt &= \int_0^\infty f(\tau)\int_0^\infty e^{-s(u+\tau)}\,g(u)\,du\,d\tau\\ &= \int_0^\infty e^{-s\tau}\,f(\tau)\,d\tau\int_0^\infty e^{-su}\,g(u)\,du,\end{aligned}$$

logo, obtemos:

$$\mathcal{L}\{(f*g)(t)\} = \mathcal{L}\{f(t)\}\mathcal{L}\{g(t)\}.$$

Exemplo 121. *Resolva o PVI:*

$$\begin{cases} y'' + y = \cos t,\\ y(0) = y'(0) = 0,\end{cases}$$

Usando os Exemplos 119 e 120 e o Teorema 24, vemos que

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\{\mathcal{L}\{\operatorname{sen} t\}\mathcal{L}\{\cos t\}\} = (\cos t)*(\operatorname{sen} t) = \frac{t\,\operatorname{sen} t}{2}.$$

é a solução do PVI.

8.7 Função de Impulso

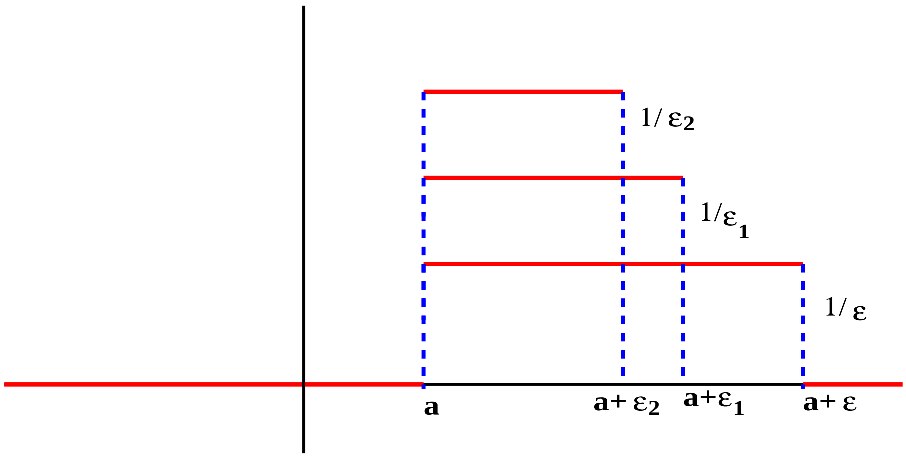
Vamos agora estudar equações diferenciais lineares com coeficientes constantes sujeitas a forças externas de natureza impulsiva. Isto é, forças $g(t)$ que agem apenas em um curto período de tempo. É comum em fenômenos deste tipo, que o efeito principal desta força não dependa precisamente de como f varia com respeito a t e sim dependa do valor da integral

$$I_{b-a} = \int_a^b g(t)dt$$

I é chamado o impulso da força f no intervalo $[a, b]$.

Devido a esta característica, vamos substituir a função $g(t)$ por uma função simples que tenha o mesmo impulso. Consideremos as funções

$$d_{a,\varepsilon}(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{\varepsilon}, & a \le t < a + \varepsilon \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$



Vemos que para todo $\varepsilon > 0$, a função $d_{a,\varepsilon}(t)$ tem um impuslo unitário no intervalo $[a, a + \varepsilon]$. De fato:

$$I_\varepsilon = \int_a^{a+\varepsilon} d_{a,\varepsilon}(t)\, dt = \frac{1}{\varepsilon}\left(a + \varepsilon - a\right) = 1.$$

Como a função $d_{a,\varepsilon}(t)$ se anula fora do intervalo $[a, a + \varepsilon]$, temos:

$$I_\varepsilon = \int_0^{\infty} d_{a,\varepsilon}(t)\, dt = 1.$$

Vamos agora considerar que a força atue em intervalos cada vez menores. Isto é, com ε cada vez menores, isto é:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} d_{a,\varepsilon}(t) = 0, \quad t \neq a,$$
$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_0^{\infty} d_{a,\varepsilon}(t)\, dt = \lim_{\varepsilon \to 0} I_\varepsilon = 1.$$

As condições acima nos dão elementos para definir o chamado impulso instantâneo que teria as seguintes propriedades:

$$\delta_a(t) = 0, \quad t \neq a,$$
$$\int_0^{\infty} \delta_a(t)\, dt = 1.$$

$\delta_a(t)$ definida pelas condiçõea acima não é uma função no sentido usual e é chamada δ de Dirac.
Podemos definir formalmente a transformada de Laplace da função δ de Dirac motivados pelo Teorema do valor médio para integrais. Se $g(t)$ é contínua em $[a, a+\varepsilon]$, então existe $\overline{t} \in [a, a+\varepsilon]$, tal que

$$\int_a^{a+\varepsilon} g(t)\, dt = g(\overline{t})\,\big(a+\varepsilon-a\big) g(\overline{t})\,\varepsilon.$$

Logo:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{\infty} g(t)\, d_{a,\varepsilon}(t)\, dt = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^{a+\varepsilon} g(t)\frac{1}{\varepsilon}\, dt = \lim_{\varepsilon\to 0} g(\overline{t}) = g(a),$$

uma vez que $\overline{t} \in [a, a+\varepsilon]$ e g é contínua em $[a, a+\varepsilon]$. Em particular:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\mathcal{L}\{d_{a,\varepsilon}(t)\} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{\infty} e^{-st}\, d_{a,\varepsilon}(t)\, dt = e^{-sa}.$$

Definiremos a transformada de Laplace do δ de Dirac, como:

$$\mathcal{L}\{\delta_a(t)\} = e^{-sa}$$

e

$$\int_0^{\infty} g(t)\delta_a(t)\, dt = g(a).$$

Notação: $\delta(t) = \delta_0(t)$

8.7.1 Princípio de Duhamel

Consideremos o PVI

$$\begin{cases} x'' + a_1 x' + a_0 x = g(t) \\ x'(0) = x(0) = 0 \end{cases}$$

Pelo Teorema 20, temos:

$$\mathcal{L}\{x(t)\}[s^2 + a_1\, s + a_0] = G(s),$$
$$\mathcal{L}\{x(t)\} = \frac{G(s)}{s^2 + a_1 s + a_0}.$$

A função

$$W(s) = \frac{1}{s^2 + a_1 s + a_0}$$

é chamada função transferência e

$$w(t) = \mathcal{L}^{-1}\{W(s)\}$$

é chamada função peso, pelo Teorema 24,

$$x(t) = w(t) * g(t) = \int_0^t w(\tau)\, g(t-\tau)\, d\tau.$$

Esta fórmula é o princípio de Duhamel para o sistema. Observe que a função peso é completamente determinada pelos parâmetros da equação. Uma vez conhecida $w(t)$ uma solução do PVI é sempre dada pela expressão acima. Observemos que:

$$\begin{aligned} W(s) &= \frac{1}{s^2 + a_1\, s + a_0} = \frac{e^{-0s}}{s^2 + a_1\, s + a_0} \\ &= \frac{\mathcal{L}\{\delta_0(t)\}}{s^2 + a_1\, s + a_0} = \frac{\mathcal{L}\{\delta(t)\}}{s^2 + a_1\, s + a_0}. \end{aligned}$$

Isto é, a função peso é a resposta do sistema à função δ de Dirac. Por isso, $w(t)$ é também chamada de resposta ao impulso unitário. O princípio de Duhamel nos mostra como podemos usar o teorema da convolução para expressar a solução de um problema de valor inicial em função de uma integral.

Exemplo 122. *Consideremos o PVI:*

$$\begin{cases} x'' + a_1 x' + a_0 x = g(t) \\ x'(0) = b_1, \quad x(0) = b_0. \end{cases}$$

Ele tem solução da forma:

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t)$$

com

$$\begin{cases} x_h'' + a_1 x_h' + a_0 x_h = 0 \\ x_h'(0) = b_1, \quad x_h(0) = b_0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} x_p'' + a_1 x_p' + a_0 x_p = g(t) \\ x_p'(0) = 0, \quad x_p(0) = 0. \end{cases}$$

De fato, para $x(t) = x_h(t) + x_p(t)$, temos:

$$\begin{aligned} x'' + a_1\, x' + a_0\, x &= (x_h + x_p)'' + a_1(x_h + x_p)' + a_0(x_h + x_p) \\ &= x_h'' + a_1\, x_h' + a_0\, x_h + x_p'' + a_1\, x_p' + a_0\, x_p \\ &= 0 + g(t) \end{aligned}$$

e

$$
\begin{aligned}
x(0) &= x_h(0) + x_p(0) = b_0 + 0 = b_0, \\
x'(0) &= x_h'(0) + x_p'(0) = b_1 + 0 = b_1.
\end{aligned}
$$

Exemplo 123. *Resolva o PVI:*

$$
\begin{cases}
y'' + 4\,y = g(t), \\
y(0) = 3 \quad y'(0) = -1,
\end{cases}
$$

Aplicando o Teorema 20, temos

$$
\mathcal{L}\{y''(t)\} = s^2\,\mathcal{L}\{y(t)\} - s\,y(0) - y'(0) = s^2\,\mathcal{L}\{y(t)\} - 3\,s + 1.
$$

Logo:

$$
s^2\mathcal{L}\{y(t)\} + 4\,\mathcal{L}\{y(t)\} = \left(s^2 + 4\right)\mathcal{L}\{y(t)\} = 3\,s - 1 + \mathcal{L}\{g(t)\} = 3\,s - 1 + G(s).
$$

Então,

$$
\begin{aligned}
Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\} &= 3\,\frac{s}{s^2+4} - \frac{1}{2}\,\frac{2}{s^2+4} + \frac{1}{2}\,\frac{2}{s^2+4}\,G(s) \\
&= 3\,\mathcal{L}\{\cos 2t\} - \frac{1}{2}\,\mathcal{L}\{\operatorname{sen} 2t\} + \frac{1}{2}\,\mathcal{L}\{\operatorname{sen} 2t\}G(s)
\end{aligned}
$$

Portanto:

$$
\begin{aligned}
y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} &= 3\,\cos 2t - \frac{1}{2}\,\operatorname{sen} 2t + \frac{1}{2}\,(\operatorname{sen} 2t) * (g(t)) \\
&= 3\,\cos 2t - \frac{1}{2}\,\operatorname{sen} 2t + \frac{1}{2}\,\int_0^t \operatorname{sen} 2\tau\, g(t-\tau)\,d\tau,
\end{aligned}
$$

é a solução do PVI. Logo:

$$
\begin{aligned}
w(t) &= \frac{1}{2}\,\operatorname{sen} 2t, \\
x_h(t) &= 3\,\cos 2t - \frac{1}{2}\,\operatorname{sen} 2t, \\
x_p(t) &= w(t) * g(t) = \frac{1}{2}\,\int_0^t \operatorname{sen} 2\tau\, g(t-\tau)\,d\tau.
\end{aligned}
$$

Vejamos agora, no caso de uma equação de ordem 2, como interpretaremos equações diferenciais sujeitas à uma força do tipo δ de Dirac. Queremos dar sentido a um problema do tipo

$$
x'' + a_1 x' + a_0 x = \delta_a(t) \tag{8.2}
$$

Diremos que $x(t)$ é uma solução da equação diferencial (8.2) se

$$x(t) = \lim_{\varepsilon \to 0} x_\varepsilon(t)$$

com $x_\varepsilon(t)$ uma solução de

$$x'' + a_1 x' + a_0 x = d_{a,\varepsilon}(t)$$

Pelo que vimos anterioremente, em uma solução da equação acima, a influência da força externa é dada por

$$x_{p,\varepsilon}(t) = \int_0^t w(\tau) d_{a,\varepsilon}(t-\tau) d\tau, \qquad w(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{ \frac{1}{s^2 + a_1 s + a_0} \right\}$$

É possível mostrar que a solução que obtemos ao tomarmos o limite de $x_{p,\varepsilon}(t)$ quando ε tende a zero também pode ser obtida se aplicarmos diretamente a transformada de Laplace diretamente no PVI que contem a função δ de Dirac como força externa.

Exemplo 124. *Uma massa $m = 1$ é presa a uma mola com constante $k = 4$. Não há resitência. A massa é solta do repouso com $x(0) = 3$. No instante $t = 2\pi$, a massa é atingida por um martelo, proporcionando um impulso igual a $I = 8$. Determine a função que descreve o movimento da massa.*

Devemos resolver o PVI:

$$\begin{cases} x'' + 4\,x = 8\,\delta_{2\pi}(t), \\ x(0) = 3 \quad x'(0) = 0, \end{cases}$$

Aplicando a transformada de Laplace, temos

$$\mathcal{L}\{x''(t)\} = s^2 \mathcal{L}\{x(t)\} - s\,x(0) - x'(0) = s^2 \mathcal{L}\{x(t)\} - 3s$$

Portanto:

$$\mathcal{L}\{x''(t)\} + 4\,\mathcal{L}\{x(t)\} = \mathcal{L}\{\delta_{2\pi}(t)\},$$

logo,

$$\begin{aligned} X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\} &= \frac{1}{s^2+4}\big(3\,s + 8\,e^{-2\pi s}\}\big) = 3\,\frac{s}{s^2+4} + 4\,\frac{2\,e^{-2\pi s}}{s^2+4} \\ &= 3\,\mathcal{L}\{\cos 2t\} + 4\,e^{-2\pi s}\,\mathcal{L}\{\operatorname{sen} 2t\} \end{aligned}$$

e:

$$
\begin{aligned}
x(t) = \mathcal{L}^{-1}\{X(s)\} &= 3\,\cos 2t + 4u_{2\pi}(t)\,\operatorname{sen} 2(t-2\pi) \\
&= \begin{cases} 3\,\cos 2\,t, & t < 2\pi \\ 3\,\cos 2\,t + 4\operatorname{sen} 2(t-2\pi), & t \geq 2\pi \end{cases} \\
&= \begin{cases} 3\,\cos 2t, & t < 2\pi \\ 3\,\cos 2t + 4\operatorname{sen} 2t, & t \geq 2\pi. \end{cases}
\end{aligned}
$$

Para $A = 25$, seja δ, tal que:

$$\operatorname{sen}\delta = \frac{4}{A} \qquad \text{e} \qquad \cos\delta = \frac{3}{A}.$$

Como $\delta \approx 0,9273$, utilizando identidades trigonométricas, podemos reescrever $x(t)$, na forma:

$$x(t) = \begin{cases} 3\,\cos 2t, & t < 2\pi \\ 5\,\cos(2t - 0,9273), & t \geq 2\pi. \end{cases}$$

A função $x(t)$ é a solução do PVI. Vemos que o efeito do impulso em $t = 2\pi$ altera a amplitude do movimento oscilatório instantaneamente. Isto provoca uma descontinuidade na velocidade.

8.8 Exercícios

1. Das seguintes funções, quais são contínuas por partes em $[0, \infty)$? Justifique sua resposta.

   a) $f(t) = e^{t^2}$ b) $f(t) = \ln(t^2 + 1)$ c) $f(t) = \dfrac{t+1}{t-1}$

   d) $f(t) = \dfrac{t-2}{t^2 - t - 2}$ e) $f(t) = e^{\frac{1}{t}}$

2. Calcule (sem consultar uma tabela), sendo a constante, a transformada de Laplace de:

   a) $f(t) = e^{at}$ b) $f(t) = te^{at}$

   c) $f(t) = t\cos at$ d) $f(t) = \cos^2 at$

   e) $f(t) = e^{at}\,\mathrm{sen}\,bt$ f) $f(t) = e^{at}\cos bt$

   g) $f(t) = t^n e^{at},\ n \in \mathbb{N}$ h) $f(t) = \cosh at$

   i) $f(t) = \mathrm{senh}\,at$ j) $f(t) = \mathrm{sen}\,at$

   k) $f(t) = 1$ l) $f(t) = t$

   m) $f(t) = t^2$ n) $f(t) = \cos at$

   o) $f(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t \leq 1 \\ 0, & t > 1 \end{cases}$

3. Ache a transformada inversa de Laplace da função dada

   a) $\dfrac{3}{s^2 + 4}$ b) $\dfrac{4}{(s-1)^3}$

   c) $\dfrac{2}{s^2 + 3s - 4}$ d) $\dfrac{2s+2}{s^2 + 2s + 5}$

   e) $\dfrac{8s^2 - 4s + 12}{s(s^2 + 4)}$ f) $\dfrac{3s}{s^2 - s - 6}$

   g) $\dfrac{2s - 3}{s^2 - 4}$

4. Calcule:

a) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{e^{-s}}{s^3}\right\}$ b) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1-e^{-\pi s}}{s^2+4}\right\}$ c) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{2(s-1)e^{-2s}}{s^2-2s+2}\right\}$

5. Use a transformada de Laplace para resolver os seguintes problemas de valor inicial

a) $y''+y=t, \quad y(0)=1, \; y'(0)=-2$

b) $y''-3y'+2y=4e^{2t}, \quad y(0)=-3, \; y'(0)=5$

c) $y''+9y=\cos 2t, \quad y(0)=1, \; y'(0)=1$

d) $y''-y'-6y=10e^{2t}, \quad y(0)=3, \; y'(0)=2$

6. Use a transformada de Laplace para resolver os seguintes problemas de valor inicial:

a) $y''+4y=\operatorname{sen} 3t, \quad y(0)=0, \; y'(0)=0$

b) $y^{(4)}-y=0, \quad y(0)=y''(0)=1, \; y'(0)=y'''(0)=0$

c) $y''+3y'+2y=0, \quad y(0)=1, \; y'(0)=0$

d) $y''-5y'+6y=e^{t}, \quad y(0)=1, \; y'(0)=1$

e) $y''-4y'+4y=0, \quad y(0)=1, \; y'(0)=1$

f) $y''-2y'+2y=e^{-t}, \quad y(0)=0, \; y'(0)=1$

g) $y'''-y=5, \quad y(0)=y'(0)=y''(0)=0$

h) $y''+y=t^2+1, \quad y(0)=\pi^2, \; y'(0)=2\pi$

i) $y''+4y=\operatorname{sen} t-u_{2\pi}(t)\operatorname{sen}(t-2\pi), \quad y(0)=y'(0)=0$

j) $y''+2y'+y=f(t), \quad y(0)=1, \; y'(0)=0;$ com $f(t)=\begin{cases}1, & 0\le t<1\\ 0, & t\ge 1\end{cases}$

k) $y'' + y = g(t), \;\; y(0) = 0, \; y'(0) = 1$ com $g(t) = \begin{cases} t, & 0 \leq t < 1 \\ 1, & t \geq 1 \end{cases}$

l) $2y'' + 8y = 4\delta_\pi(t), \;\; y(0) = y'(0) = 0$

m) $y'' + 4y = 4\delta_{\frac{\pi}{6}}(t)\operatorname{sen} t, \;\; y(0) = y'(0) = 0$

n) $y^{(4)} + 3y''' + y'' - 3y' - 2y = t, \;\; y(0) = y'(0) = y''(0) = y'''(0) = 0$

o) $y'' + 2y' + y = \delta(t) + u_{2\pi}(t), \;\; y(0) = 0, \; y'(0) = 1$

p) $y'' + 2y' + 2y = \delta_\pi(t), \;\; y(0) = 1, \; y'(0) = 0$

7. Use a transformada de Laplace para encontrar uma solução geral das seguintes equações:

a) $y'' - 2y' + 2y = 0$

b) $y'' - y' - 6y = 0$

c) $y'' + 2y' + y = 4e^{-t}$

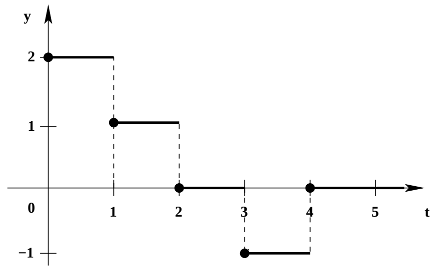
d) $y'' - 2y' + 2y = \cos t$

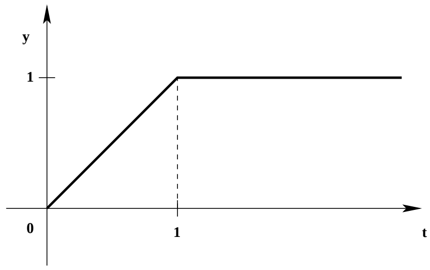
8. Ache a transformada de Laplace de:

a) $f(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < 2 \\ (t-2)^2, & t \geq 2 \end{cases}$

b) $f(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < 1 \\ t^2 - 2t + 2, & t \geq 1 \end{cases}$

c) $f(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < \pi \\ t - \pi, & \pi \leq t < 2\pi \\ 0, & t \geq 2\pi \end{cases}$

d) 

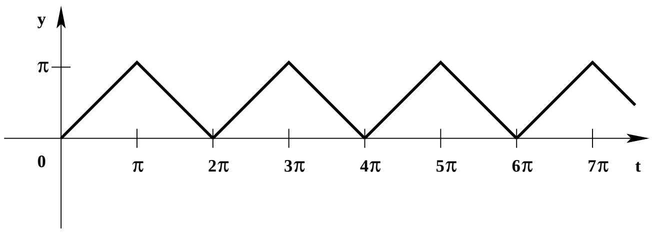
e) 

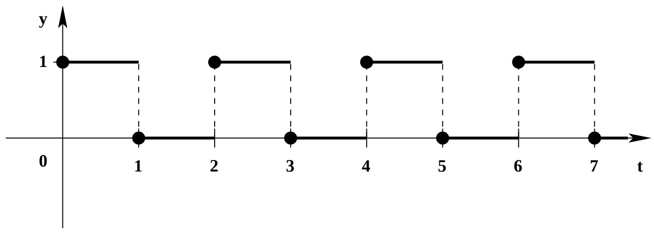
f) $f(t) = t^2 u_1(t)$

g) $f(t) = e^{-2t} u_\pi(t)$

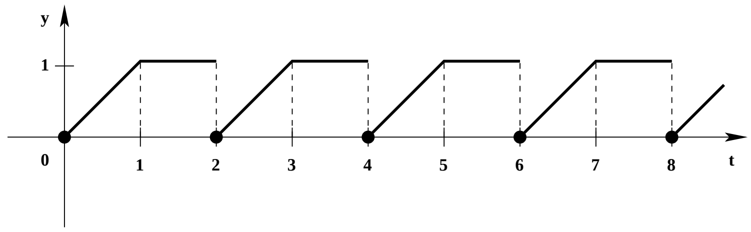
h) $f(t) = (t-3)u_2(t) - (t-2)u_3(t)$

9. Determine a transformada de Laplace das seguintes funções periódicas:

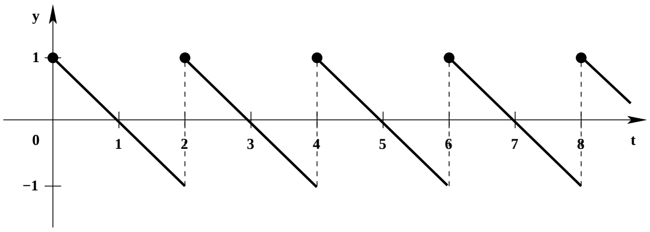
a) 

b) 

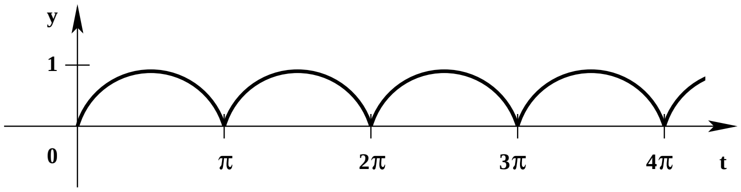
c)



d)



e)



$$f(t) = \operatorname{sen} t, \quad 0 \le t < \pi,$$
$$f(t+\pi) = f(t)$$

10. Mostre que $f * g = g * f$

11. Use a convolução para calcular:

a) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{s}{(s^2+1)^2}\right\}$ b) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s^2(s+1)^2}\right\}$ c) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{s}{(s^2+a^2)^2}\right\}, \quad a \neq 0$

12. Determine a solução do problema de valor inicial em termos de uma integral de convolução

a) $y'' + \omega^2 y = g(t), \;\; y(0) = 0, \; y'(0) = 1$

b) $y'' + 2y' + 2y = \operatorname{sen} at, \;\; y(0) = y'(0) = 0$

13. Seja $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$. Mostre que $f(t) = -\dfrac{1}{t}\mathcal{L}^{-1}\{F'(s)\}$.

14. Use o resultado do exercício anterior para determinar $f(t)$ quando $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ é dada por:

a) $\ln\left(\dfrac{s+a}{s-a}\right)$ b) $\operatorname{arctg}\dfrac{a}{s}$ c) $\ln\left(1+\dfrac{a^2}{s^2}\right)$

15. Calcule $\mathcal{L}\left\{\dfrac{\cos at - 1}{t}\right\}$

16. Usando a transformada de Laplace, resolva os seguintes problemas de valor inicial:

a) $\begin{cases} x' = x - 2y \\ y' = x - y \end{cases}$
$x(0) = y(0) = 1$

b) $\begin{cases} x' = x + y \\ y' = 4x + y \end{cases}$
$x(0) = 2, \quad y(0) = 3$

c) $\begin{cases} x' - 3x - 4y = -1 \\ y' - 2x - y = 1 \end{cases}$
$x(0) = 2, \quad y(0) = 1$

d) $\begin{cases} x'' - 2y = 2 \\ y' + x = 5e^{2t} + 1 \end{cases}$
$x(0) = x'(0) = 2, \quad y(0) = 1$

e) $\begin{cases} x' + y + z = 1 \\ y' - x + z = 2\operatorname{sen} t \\ z' - x = 0 \end{cases}$ $x(0) = y(0) = z(0) = 1$

17. Decomponha em frações parciais:

a) $\dfrac{2x+3}{x^2+3x-10}$ b) $\dfrac{x}{(x+1)(x^2+5x+6)}$ c) $\dfrac{1}{x^2-3x+2}$

d) $\dfrac{x}{x^2+x-6}$ e) $\dfrac{2x-1}{x^2-4}$ f) $\dfrac{x^2+1}{x^3-4x}$

g) $\dfrac{3x+5}{2x^3+12x^2+10x}$ h) $\dfrac{x+7}{(x+1)(x^2-4x+3)}$ i) $\dfrac{x^3+2x^2-3x+1}{x^2+2x-8}$

j) $\dfrac{x^2+1}{(x-3)(x^2+4x+3)}$ k) $\dfrac{x+1}{x^2(x-1)}$ l) $\dfrac{x^2+1}{(x+1)^2(x-1)}$

m) $\dfrac{x-3}{x^2-4x+4}$ n) $\dfrac{2x+5}{x^3+3x^2-4}$ o) $\dfrac{x^2}{(x^2-3x+2)^2}$

p) $\dfrac{x-1}{x(x^2+2x+4)}$ q) $\dfrac{1}{(x+1)(x^2+1)}$ r) $\dfrac{1}{x^4-1}$

s) $\dfrac{x^4+1}{x^4+x^2}$ t) $\dfrac{u^2+1}{u^3+1}$ u) $\dfrac{2x+1}{(x^2-4)^2}$

v) $\dfrac{x^3+x+1}{x^2-2x^2+1}$ w) $\dfrac{x^3-1}{(x+1)^2(x^2+1)^2}$